28/3/2016

~~#3~~

4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Βρείτε $m_E(x) \in \mathbb{R}[x]$

Λύση

Είδαμε ότι $\chi_E(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \ldots =$

$= -(x-1)^2(x+1)$

Από θεωρία

$m_E(x) = (x-1)(x+1)$ (βαθμού 2) ή

$m_E(x) = (x-1)^2(x+)$

$\uparrow$

(βαθμού 3)

Για $p(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$, έχουμε

$$p(E) = E^2 - I_3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} - I_3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \neq O_{3\times 3}$$

Από το p δεν μηδενίζεται το E

Συμπέρασμα $m_E(x) = (x-1)^2(x+1)$

Ερώτημα: Είναι ο E διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$;

Απάντηση: Από θεωρία E διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το $m_E(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων στο $\mathbb{R}[x]$. Δεν ισχύει λόγω του στο $(x-1)^2$

Άρα E όχι διαγωνίσιμος $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Είδαμε ότι οι όμοιοι πίνακες έχουν τα ίδια βαθμίδα, ορίζουσα, ίχνος, και χαρακ. πολυων.

τώρα θα δούμε ότι έχουν και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Πρόταση.
Έστω $A, P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με P αντιστρέψιμο. Τότε $\forall\ k \geq 1$

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

Απόδ. Το έχουμε δει.

Πρόταση
Έστω $A, P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ με P αντιστρέψιμο και $q(x) \in \mathbb{F}[x]$.
Τότε $q(P^{-1}AP) = P^{-1}q(A)P$.

Απόδειξη
Αφού $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ $\exists\ a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{F}$ ώστε

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d.$$

Άρα με χρήση της προηγ. Πρότασης έχουμε

$$q(P^{-1}AP) = a_0I_\nu + a_1(P^{-1}AP) + a_2(P^{-1}A^2P) + \dots + a_d(P^{-1}AP)^d =$$

$$= a_0I_\nu + a_1(P^{-1}AP) + a_2P^{-1}A^2P + \dots + a_dP^{-1}A^dP =$$

$$= P^{-1}(a_0I_\nu + a_1A + \dots + a_dA^d)P =$$

$$= P^{-1}q(A)P.$$

Πόρισμα

Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ όμοιοι. Τότε για $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ έχουμε $q(A) = \Theta_{\nu\times\nu}$ αν και μόνο αν $q(B) = \Theta_{\nu\times\nu}$. Σαν πόρισμα από τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου παίρνουμε ότι

$$m_A(x) = m_B(x).$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού A, B όμοιοι $\exists\, P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος ώστε $B = P^{-1}AP$.

Από την προηγούμενη πρόταση, $\forall\, q(x) \in \mathbb{F}[x]$,

$q(B) = P^{-1} q(A) P$ (1)

Η (1) δίνει αφού P αντιστρέψιμος

$q(A) = P\, q(B)\, P^{-1}$ (2)

Άρα αν $q(A) = \Theta_{\nu\times\nu}$ η (1) δίνει $q(B) = \Theta_{\nu\times\nu}$.

Όμοια αν $q(B) = \Theta_{\nu\times\nu}$ η (2) δίνει $q(A) = \Theta_{\nu\times\nu}$. Το αποτέλεσμα έπεται.

⇒ <u>Εκθετική Απεικόνιση Πινάκων</u>

Ορισμός: Εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$a_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Τότε (από

κριτήρια σειρών) υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$

και συμβολίζεται $\lim_{n\to+\infty} a_n = \exp(x) = e^x$ 3

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$$

(Βασική ιδιότητα: $exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη παντού και $(exp)' = exp$)

<u>Ορισμός</u>: όριο ακολουθίας πινάκων. Έστω για $n \geq 1$

$D_n \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ με

$$\text{με } D = \begin{bmatrix} (d_{11})_n & (d_{12})_n & \dots & (d_{1\mu})_n \\ (d_{21})_n & (d_{22})_n & \dots & (d_{2\mu})_n \\ \vdots & & & \\ (d_{\mu 1})_n & (d_{\mu 2})_n & \dots & (d_{\mu\mu})_n \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$B \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, \text{ με } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{12} & b_{1\mu} \\ b_{\mu 1} & \dots & b_{\mu 2} & b_{\mu\mu} \end{bmatrix} \text{ λέμε}$$

$\lim_{n \to +\infty} D_n = B$ αν $\forall (i,j)$ με $1 \leq i,j \leq \mu$

$\lim_{n \to +\infty} (d_{ij})_n = b_{ij}$ Το όριο (αν υπάρχει) είναι μοναδικό

<u>Π.χ.</u> Αν

$$D_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 2 & 1 + \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = \begin{bmatrix} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} & \lim_{n \to +\infty} 0 \\ \lim_{n \to +\infty} 2 & \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός / πρόταση

Έστω $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$. Για $n \geq 1$ ορίζουμε $D_n \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ ως εξής

$$D_n = I_\mu + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!}$$

(Υπενθ. $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n$)

Ισχυρισμός (χωρίς απόδ.)

Υπάρχει μοναδικός πίνακας $\exp(A) \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} D_n = \exp(A)$ (Συμβολίζουμε $e^A = \exp(A)$)

Με άλλα λόγια, ορίσαμε συνάρτηση $\exp : \mathbb{R}^{\mu\times\mu} \to \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$.

Η συνάρτηση exp είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε τώρα πώς υπολογίζεται το $\exp(A)$ για $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ διαγωνίσιμο.

Παρατήρηση: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγώνιος. Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.

(Πράγματι, για $P = I_\nu$ έχουμε $P^{-1}AP = A$ διαγώνιος, άρα A διαγωνίσιμος) Το αντίστροφο δεν ισχύει

π.χ. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ διαγωνίσιμος (στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι διαγώνιος)

Πρόταση (χωρίς απόδειξη για το ii)

i) Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ διαγώνιος

Τότε ισχύει

~~ii) Έστω~~ $\cancel{A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}}$

ότι για $k \geq 1$ $A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_\mu^k \end{bmatrix}$ Έτσι

συνεπώς $I_\mu + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda_1}{1!} + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_1^n}{n!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \frac{\lambda_\mu}{1!} + \frac{\lambda_\mu^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda_\mu^n}{n!} \end{bmatrix}$$

Άρα $\exp(A) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ 0 & & \ddots & e^{\lambda_\mu} \end{bmatrix}$

Δηλαδή, για A διαγώνιος, ο υπολογισμός $\exp(A)$ ανάγεται στον υπολογισμό

e^{λ_i} $\leftarrow$ μ στοιχεία εκθετικής $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ii) Έστω $A \in \mathbb{R}^{\mu\times\mu}$ διαγωνίσιμος από τον

$\mathbb{R}$ και $P \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix}$$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τις ιδιοτι-

μές του A

Τότε $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

Άρα $\forall$ $k \geq 1$ $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$

και αθροίζοντας στο όριο έχουμε

$$exp(A) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_\nu} \end{bmatrix} P^{-1}$$

<u>π.χ</u> έστω

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Υπολογίστε τον

πίνακα $exp(A) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Βήμα 1

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 =$$

$= (x-5)(x+1) \in \mathbb{R}[x]$

Ιδιοτιμές

$\lambda_1 = 5$ με αλγ. πολλ 1

$\lambda_2 = -1$ " " " 1

Υπολογισμός

$$V_A(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : (A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0_{2\times 1} \right\}$$

Μετά τις πράξεις, το $V_A(5)$ έχει διάσταση 1 και βάση $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

το $V_A(-1)$ " " " 1 " " $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Άρα από θεωρία

για $P = [e_1 | e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$A = P\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1} \Rightarrow \exp(A) = P\begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}P^{-1}$$

υπολογίζουμε $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ άρα ... πράξεις

Μέχρι τώρα $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \rightsquigarrow$

- $\chi_A(x)$ χαρακτ. πολυώνυμο
- $m_A(x)$ ελάχιστο πολυώνυμο
- ιδιοτιμές του A, ιδιόχωροι $V_A(\lambda)$ του A ως προς την ιδιοτιμή λ
- ιδιοδιανύσματα του A, διαγωνιοποιήσιμα ή μη του A
- Θ. Cayley - Hamilton: $\chi_A(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$

Στα επόμενα, $\mathbb{F}$ σώμα $V \neq \{0\}$ διαν. χώρος

επί του $\mathbb{F}$ πεπερ. διάστασης $e = (e_1, \ldots, e_\nu)$

διατετ. βάση του V $f: V \to V$ γραμ. απεικόνιση

Παρατήρηση: Η f ξεκινάει και καταλήγει στο V (Αν κατέληγε στο $W \neq V$ τα παραπάνω δεν έχουν νόημα!)

Γραμμική Απεικόνιση $f: V \to V$

- $\chi_f(x)$ χαρακτ. πολυώνυμο της f
- $m_f(x)$ ελάχιστο πολυων. της f
- Ιδιοτιμές της f, ιδιόχωρος $V_f(\lambda)$ της f ως προς την ιδιοτιμή λ
- Ιδιοδιανύσματα της f, διαγωνιοποιησιμότητα της f
- Θ. Cayley-Hamilton: $\chi_f(f)$ = μηδενική γραμ. απεικ. $V \to V$.

<u>Ορισμός</u>

Θέλουμε: $A = [f]_e^e \leftarrow \mathbb{F}^{n \times n}$

<u>Παρατήρηση</u>: Η βάση e εμφανίζεται δύο φορές.

Θα έχουμε

$\chi_f(x) = \chi_A(x)$, $m_f(x) = m_A(x)$

Ερώτημα: Γιατί καλά ορισμένα. Με άλλα λόγια αν αλλάξουμε βάση και αντί για ~~την~~ την e χρησιμοποιήσουμε την διατετ. βάση e' του V, παίρνουμε τα ίδια πολυώνυμα;

Απάντηση

Έστω $B = [f]_{e'}^{e}$, Ξέρουμε A, B όμοιοι πίνακες και ότι όμοιοι πίνακες έχουν ίδια χαρακτηριστικά και ελάχιστο πολυώνυμα. Άρα τα πολυώνυμα $X_f(x)$ και $m_f(x)$ δεν εξαρτώνται από την επιλογή της βάσης e